

## Correction Devoir maison n°5

**Exercice 1 - Inspiré d'ECRICOME 2004 ECT**

L'exercice se propose d'étudier la fonction  $f$  étant définie sur  $\mathbb{R}$  par : pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$ .

**Étude d'une fonction  $g$  intermédiaire.**

On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\forall t \geq 0, \quad g(t) = \frac{t}{t+1} - \ln(1+t)$$

1. Pour tout  $t \geq 0$ ,  $t+1 > 0$ , donc

- $t \rightarrow t$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$
- $t \rightarrow t+1$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et ne s'annule pas sur cet intervalle.
- $t \rightarrow \ln(t+1)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$

Donc  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  en tant que somme, quotient et composée de fonctions continues.

2. On a

$$\frac{t}{t+1} = \frac{t}{t(1+1/t)} = \frac{1}{1+\frac{1}{t}}$$

Or  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{t}} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+t) = +\infty$ . Donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = -\infty.$$

3. La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  en tant que somme, quotient et composée de fonction dérivables sur  $\mathbb{R}_+$ . On a alors

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \quad g'(t) &= \frac{(t+1) - t}{(t+1)^2} - \frac{1}{t+1} \\ &= \frac{-t}{(t+1)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

4. La fonction  $g$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ . La fonction  $g$  admet donc un maximum en 0. Or  $g(0) = 0$ .  
Donc

$$\forall t \geq 0, \quad g(t) \leq 0.$$

**Étude de la fonction  $f$ .**

5. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit et composée de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= -e^{-x} \ln(1 + e^x) + e^{-x} \times \frac{e^x}{1 + e^x} \\ &= e^{-x} \left( \frac{e^x}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x) \right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x}g(e^x).}$$

6. On a

$$e^{-x} \ln(1 + e^x) = \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x}$$

Et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + X)}{X}$ . Par taux d'accroissements,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1.}$$

On a aussi

$$e^{-x} \ln(1 + e^x) = e^{-x} \ln(e^x(e^{-x} + 1)) = e^{-x}(x + \ln(1 + e^{-x})) = xe^{-x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x}).$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  par croissance comparée et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln(1 + e^{-x}) = 0$ . Ainsi

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.}$$

7. Pour tout  $x$  réel,  $e^x > 0$  et donc  $g(e^x) < 0$ . De plus,  $e^{-x} > 0$  et on a donc  $f'(x) < 0$ .

La fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

On trace alors son tableau de variations.

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
Variations de $f$	$1 \begin{array}{c} \searrow \\ \ln(2) \\ \searrow \\ \frac{\ln(1+e)}{e} \\ \searrow \\ 0 \end{array}$			

8. Sachant que

- $f$  est continue sur  $[0, 1]$ ,
- $f$  est strictement décroissante sur  $[0, 1]$ ,
- $f([0, 1]) = \left[ \frac{\ln(1+e)}{e}; \ln(2) \right] \subset [0; 1]$ .

$f$  est une bijection sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\left[ \frac{\ln(1+e)}{e}; \ln(2) \right] \subset [0; 1]$  (On dit que  $f$  est stable par  $[0; 1]$ ). On a alors,

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq f(x) \leq 1.}$$

## Exercice IV - ECRICOME 2011

### PARTIE I. Un jeu en ligne.

- Les positionnement sont déterminés par l'ensembles (sans ordre) des 3 positions distinctes parmi 9. il y en a donc  $\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$
- $(H)$  est formé de 3 positionnements : ligne 1, 2 ou 3, les positionnements étant équiprobables (on le suppose) donc  $P(H) = \frac{3}{84}$   
 $(V)$  est formé de 3 positionnements : colonne  $A$ ,  $B$  ou  $C$  donc  $P(V) = \frac{3}{84}$   
 $(D)$  comporte es deux diagonales descendants et ascendantes. Donc  $P(D) = \frac{2}{84}$
- $(H, V, D, N)$  étant un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} P(N) &= 1 - P(V) - P(H) - P(D) \\ &= 1 - \frac{8}{84} = 1 - \frac{2}{21} \\ &= \frac{19}{21} \simeq 0.9048 \end{aligned}$$

- La société peut s'attendre à 10 000 relances par jour de ce jeu.

- Pour chaque entier naturel  $i$  non nul. on note  $Z_i$  le gain de la société à la  $i^{\text{ème}}$  relance. Lors de la  $i^{\text{ème}}$  relance, la société peut gagner 2 euros (la mise) si  $N$  ou en perdre 18 sinon. Donc  $Z_i(\Omega) = \{2, -18\}$ . avec  $P(Z_i = 2) = P(N) = \frac{19}{21}$  et  $P(Z_i = -18) = \frac{2}{21}$ , donc

$$\begin{aligned} E(Z_i) &= 2 \frac{19}{21} - 18 \frac{2}{21} \\ &= \frac{38 - 36}{21} = \frac{2}{21} \end{aligned}$$

Conclusion :  $E(Z_i) = \frac{2}{21} \simeq 0,1$

- le gain total est la somme des gains à chaque relance donc  $Z = \sum Z_i$  et  $E(Z) = 10000 \cdot \frac{2}{21} \simeq 1000$   
 Conclusion : En moyenne, la société gagnera à peu près 1000€ par jour, mais elle peut espérer beaucoup plus!

### PARTIE II. Cas de joueurs invétérés.

- Un Joueur décide de jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes.
  - $X$  est le nombre de parties gagnées en 100 parties indépendantes, la probabilité de gagné chacune étant de  $\frac{2}{21}$   
 Conclusion :  $X \leftrightarrow \mathcal{B}\left(100, \frac{2}{21}\right)$  (loi binomiale)
  - on a donc  $E(X) = \frac{200}{21}$  et  $V(X) = \frac{2}{21} \frac{19}{21} 100$  (formules du cours)
  - En 100 parties,  $X$  sont gagnées (gain  $18X$ ) et  $100 - X$  perdues (perte  $2(100 - X)$ )  
 La perte totale est donc  $T = 2(100 - X) - 18X = 200 - 20X$   
 (On peut compter différemment : il mise 200 et reçoit 20 par partie gagnée donc  $20X$ )  
 Conclusion :  $T = 200 - 20X$

2. Avec  $n$  parties au lieu de 100, l'événement  $U =$  "gagner au moins une partie" est l'événement contraire de  $(X = 0)$

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} \left(\frac{2}{21}\right)^0 \left(\frac{19}{21}\right)^n$$

Donc

$$\begin{aligned} P(U) &= 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^n \geq 0.5 \\ &\iff \left(\frac{19}{21}\right)^n \leq \frac{1}{2} \\ &\iff n \ln\left(\frac{19}{21}\right) \leq -\ln(2) \quad (\text{attention } \ln\left(\frac{19}{21}\right) < 0) \\ &\iff n \geq \frac{-\ln(2)}{\ln\left(\frac{19}{21}\right)} \simeq \frac{0,7}{0,1} \end{aligned}$$

*Conclusion :* il faut jouer au moins 7 (ou 8) partie pour en gagner au moins une avec une probabilité supérieure à 50%

### PARTIE III. Contrôle de la qualité du jeu.

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est dérégulée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case  $(A, 1)$ , les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note  $\Delta$  l'événement « la fonction aléatoire est dérégulée » et on pose  $P(\Delta) = x$  avec  $x \in ]0, 1[$ .

1. Sachant  $\Delta$ , les positions sont déterminées par la seule combinaison des 2 autres positions parmi les 8 restantes.

Il y a donc  $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$  positionnements possibles et équiprobables.

$(H)$  est à présent réduit à la ligne 1,  $V$  à la colonne  $A$  et  $D$  à la diagonale descendante.

*Conclusion :*  $P_{\Delta}(H) = P_{\Delta}(V) = P_{\Delta}(D) = \frac{1}{28}$

2. On a donc  $P_{\Delta}(N) = 1 - \frac{3}{28} = \frac{25}{28}$

Sachant  $\bar{\Delta}$ , l'expérience se fait dans les conditions de la partie I et les probabilités sont donc celle de la partie I :  $P_{\bar{\Delta}}(N) = \frac{19}{21}$

$(\Delta, \bar{\Delta})$  est un système complet d'événement donc

$$\begin{aligned} P(N) &= P_{\bar{\Delta}}(N) \cdot P(\bar{\Delta}) + P_{\Delta}(N) \cdot P(\Delta) \\ &= x \frac{25}{28} + (1-x) \frac{19}{21} \\ &= x \frac{25}{4 \cdot 7} + (1-x) \frac{19}{3 \cdot 7} \\ &= \frac{25 \cdot 3 - 19 \cdot 4}{3 \cdot 4 \cdot 7} x + \frac{19}{21} \\ &= -\frac{x}{84} + \frac{19}{21} \end{aligned}$$

*Conclusion :* la probabilité les jetons ne soient pas alignés est égal à  $P(N) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}$

3. Soit  $G$  la variable aléatoire égale au gain réalisé par la société de jeu lors d'une partie jouée. On a donc  $P(G = 2) = P(N)$  et  $P(G = -18) = P(\bar{N}) = 1 - P(N)$

Donc

$$\begin{aligned} E(G) &= 2 \left( -\frac{x}{84} + \frac{19}{21} \right) - 18 \left( 1 + \frac{x}{84} - \frac{19}{21} \right) \\ &= -\frac{20}{84}x + \frac{2}{21} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E(G) > 0 &\iff -\frac{20}{84}x + \frac{2}{21} > 0 \\ &\iff x < \frac{2}{21} \cdot \frac{84}{20} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

*Conclusion* : le gain moyen reste positif tant que  $x < \frac{2}{5}$

4. On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés.

la fonction aléatoire a été dérégulée si  $\Delta$

On cherche donc  $P_{\bar{N}}(\Delta)$  par la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} P_{\bar{N}}(\Delta) &= \frac{P(\Delta \cap \bar{N})}{P(\bar{N})} \\ &= \frac{P(\Delta) P_{\Delta}(\bar{N})}{P(\bar{N})} \\ &= \frac{x \cdot \frac{3}{28}}{1 - \left( -\frac{x}{84} + \frac{19}{21} \right)} \\ &= \frac{x \cdot \frac{3}{28}}{\frac{2}{21} + \frac{x}{84}} = \frac{9x}{x+8} \end{aligned}$$

*Conclusion* : Si les jetons sont alignés, la fonction aléatoire a été dérégulée avec une probabilité  $\frac{9x}{x+8}$